Problemes pel curs 1993–1994

1. Proveu que tots els angles del triangle ABC són aguts si, i només si, existeixen punts A', B', C' de l'interior dels costats BC, AC, i AB respectivament tals que els segments AA', BB', CC' tinguin la mateixa longitud.

2. Suposem que $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ és una permutació dels números $1, 2, \ldots, 100$. Proveu que la suma $1\,a_1 + 2\,a_2 + \cdots + 100\,a_{100}$ té un mínim en la permutació $100, 99, \ldots, 1$.

3. Sigui $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, amb n sencer, $n > 1$. Proveu que $f(x)$ no pot pas ser el producte de dos polinomis, ambdós amb tots el seus coeficients sencers i de grau ≥ 1.

4. Sigui $\cos a = b$ i $\cos b = a$. Proveu que $a = b$.

5. En un cercle de centre O i radi unitat considerem una corda AB. Damunt de la corda AB considerem una semicircumferència cap a fora. Sigui D el centre d'aquesta semicircumferència. Proveu que el punt C de la semicircumferència més llunyà del centre O de la circumferència inicial és el punt que es troba damunt del radi ODC perpendicular a la corda AB. Seguidament determineu AB per tal que OC sigui màxim.

6. Sigui $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots\}$ una successió no decreixent de sencers positius. Diem que V és *complet* si, i només si, cada sencer positiu n és la suma d'una subsuccessió de V; és a dir, si per a cada $n \in \mathbb{N}$,
$$n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i v_i, \qquad \text{on } a_i = 0 \text{ o } 1.$$
Proveu que
   (a) V és completa si, i només si, $v_1 = 1$, i, per a tot $k = 2, 3, \ldots$, $s_{k-1} = v_1 + v_2 + \cdots + v_{k-1} \geq v_k - 1$.
   (b) el conjunt F dels nombres de *Fibonacci* és complet;
   (c) $F - f_r$ és complet;
   (d) si $v_1 = 1$ i $v_{k+1} \leq 2v_k$, aleshores V és complet.

7. Considereu l'anell Γ de tots els nombres complexos $a + bi$, on a i b són nombres sencers. Sigui p un nombre primer. Proveu que les afirmacions següents són equivalents:
   a) $\Gamma/p\Gamma$ és un cos.
   b) la congruència $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ no té solucions senceres.
   c) $p \equiv 3 \pmod{p}$.

8. Demostreu que, per a qualsevol polígon convex d'àrea 1, existeix un paral·lelògram d'àrea 2 que el conté.

9. Proveu que el polinomi

$$x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \cdots - 2nx + 2n + 1$$

no té pas arrels reals.

10. Sigui P un punt d'un arc de circumferència que abraça una corda AB. Demostreu la propietat òbviament evident que estableix que la suma de les cordes AP i PB tenen un màxim quan P es troba en el punt mig de l'arc AB .

11. Resoldre l'equació $\sin 7x + \sin 8x = 1.99999$.

12. Si a, b, c, d són nombres reals positius tals que

$$\lfloor na \rfloor + \lfloor nb \rfloor = \lfloor nc \rfloor + \lfloor nd \rfloor,$$

per a qualsevol nombre sencer n, proveu que

$$a + b = c + d.$$

Si a, b, c, d són nombres positius *irracionals* tals que

$$a + b = c + d,$$

proveu que, per a tot $n = 1, 2, 3, \ldots, \lfloor na \rfloor + \lfloor nb \rfloor = \lfloor nc \rfloor + \lfloor nd \rfloor$.

13. Per a tota parella de nombres reals x, y tenim la desigualtat

$$f(x) - f(y) \leq (x - y)^2.$$

Trobeu totes les funcions f.

14. Proveu que $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ no pot ser expressat com el producte de menys d'n primers (no necessàriament diferents).

15. Sigui ABC un triangle acutangle i D un punt del seu interior tal que

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC$$

i

$$\angle ADB = \angle ACB + 90^\circ.$$

a) Calculeu el valor de la raó

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}.$$

b) Demostreu que les tangents en C a les circumferències circumscrites als triangles ACD i BCD són perpendiculars.

16. Damunt d'un tauler d'escacs infinit juguem de la forma següent: en començar hi ha n^2 fitxes col·locades sobre un quadrat d'$n \times n$ cel·les adjacents, amb una fitxa a cada una de les cel·les. Una jugada és un salt d'una fitxa en una direcció horitzontal o vertical per damunt d'una cel·la adjacent ocupada per una altra fitxa, fins a una no ocupada que sigui contigua amb ella. La fitxa per damunt de la qual hem saltat es retira del tauler. Trobeu els valors d'n per als quals el joc pot acabar quedant una sola fitxa damunt del tauler.

17. Si f designa la funció que dóna $\cos 17x$ en termes de $\cos x$, és a dir,

$$\cos 17x = f(\cos x),$$

proveu que aquesta mateixa funció f dóna $\sin 17x$ en termes de $\sin x$.

18. Proveu que

 (a) $n\sigma(n) \equiv 2(\text{mòd } \varphi(n))$ es compleix per a tot nombre primer i únicament pels nombres compostos $4, 6$ i 22;

 (b) la funció

$$f(x,y) = \frac{y-1}{2}\left[|B^2-1| - (B^2-1)\right] + 2,$$

 on $B = x(y+1) - (y!+1)$, amb $x, y \in \mathbb{N}$, solament genera nombres primers, els genera tots i, si són senars, solament els genera una vegada;

 (c) $n\sigma(n) + \frac{1}{2}\left[|B^2-1| - (b^2-1)\right] \equiv 2\,(\text{mòd } \varphi(n))$, on $B = (n-4)(n-6)(n-22)$ si, i només si, n és un nombre primer.

19. Sigui $\mathbb{N} = \{1,,2,3,\ldots\}$. Determineu si existeix una funció $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que compleixi les condicions següents:

 1. $f(1) = 2$,
 1. $f(f(n)) = f(n) + n$, per a tot $n \in \mathbb{N}$,
 3. $f(n) < f(n+1)$, per a tot $n \in \mathbb{N}$.

20. Siguin P, Q, R tres punts del pla. Definim $m(PQR)$ com el mínim de les longituds de les alçades del triangle PQR (cas que P, Q, R estiguin en línia recta, aleshores $m(PQR) = 0$). Siguin A, B, C punts del pla. Demostreu que, per a qualsevol punt X del pla,

$$m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$

21. Trobeu el valor mínim de la funció

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2+9} + \sqrt{(x-8)^2+16} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

22. Siguin A i B matrius quadrades de la mateixa mida sobre el cos dels complexos i sigui $C = AB - BA$. Sabem que $CA = AC$ i $CB = BC$. Expressa $(A+B)^3$ com una suma de monomis $A^i B^j C^k$.

23. Proveu que, si des d'els vèrtexs B i C d'un triangle rectangle ABC portem els catets damunt la hipotenusa BC, aleshores els catets se s'encavalquen en un segment la longitud del qual coincideix amb el radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle.

24. Determineu cada una de les arrels reals de

$$x^4 - \left(2 \cdot 10^{10} + 1\right) x^2 - x + 10^{20} + 10^{10} - 1 = 0$$

correctes fins al quart decimal.

25. Sigui $a > 0$. Considereu la successió $x_n = n\,(\sqrt[n]{a} - 1)$.

    a) Proveu que la successió $\{x_n\}$ és monòtona i afitada.
    b) Feu $L(a) = \lim_{n\to\infty} x_n$. Proveu que $L(ab) = L(a) + L(b)$, per a tota parella de nombres reals positius a i b.

26. Sobre el cos dels reals considereu el sistema d'equacions les incògnites del quals són numerades amb elements de l'anell $\mathbb{Z}_n$ dels romanents mòdul n:

$$x_{i-1} + 2x_i + x_{i+1} = 0, \qquad i \in \mathbb{Z}.$$

Descriu el conjunt de totes les solucions.

27. Sigui ABC un triangle equilàter i Γ la seva circumferència inscrita. Si D i E són punts dels costats AB i AC, respcetivament, tals que DE és tangent a Γ, demostreu que

$$\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = 1.$$

28. Dos nombres sencers no negatius a i b són "quats" si l'expressió decimal d'$a+b$ consta solament de zeros i uns. Siguin A i B dos conjunts infinits de sencers no negatius, tals que B és el conjunt de tots els nombres que són "quats" de tots els que pertanyen a A, i A és el conjunt de tots els nombres que són "quats" dels que pertanyen a B. Proveu que en un d'ambdós conjunts A o B hi ha una infinitat de parelles de nombres x, y tals que $x - y = 1$.

29. Proveu que p és un nombre primer és equivalent a cada una de les proposicions següents:

(a) $\sigma(p) + \varphi(p) = p \cdot d(p)$, a on $\sigma(n)$ és la suma dels divisors positius d'n, $d(n)$ és el nombre de divisors positius d'n i $\varphi(n)$ és la *funció d'Euler* d'n és a dir, la funció que mideix el nombre de números naturals $m \leq n$ que són primers amb n];

(b) $n|((n_1)! + 1)$ [*Teorema de Wilson*];

(c) $n|\sum_{r=1}^{n-3} r(r!)$.

30. Quantes arrels de l'equació $z^6 + 6z + 10 = 0$ pertanyen a cada un dels quadrants del pla complex?

31. Un tetaràedre $ABCD$ és ***isòscels*** ssi els vèrtexs oposats són iguals dos a dos. És a dir, $AB = CD, AC = BD$, i $AD = BC$. És fàcil provar que les cares del tetràedre són triangles congruents [iguals] i, per tant, tenen la mateixa superfície i el mateix perímetre. Proveu que

    (a) si les cares d'un tetràedre tenen el mateix perímetres són iguals;

    (b) un tetràedre és isòscels si, i només si, la suma dels angles de les cares en cadaun dels vèrtexs és 180°;

    (c) les línies fetes als vèrtexs d'una cara d'un tetràedre des del punt de contacte de la cara amb l'esfera inscrita formen tres angles en el punt de contacte que són els mateixos tres angles en cada una de les cares.

    (d) si totes les cares d'un tetràedre tenen la mateixa superfície, són iguals;

    (e) un tetràedre és isòscels si, i només si, les seves esferes inscrita i circumscrita són concèntriques.

32. Sabem que hi ha exactament n^k k−ples diferents $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$, construïbles a partir del conjunt $\{1, 2, \dots, n-1, n\}$ si s'accepta la repetició. Per a cada una d'aquestes k−ples a notem el valor mínim a_i. Proveu que la suma de tots aquests valors mínims és precisament

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k.$$

33. Quins són el tres darrers dígits de $7^{9\,999}$?

34. Llancem un dau normal repetidament fins que el total dels valors superi n. Quin és el resultat més probable que podem aconseguir?

35. Si a, b, c formen un triangle, proveu que, per a tot valor d'$n = 2, 3, 4, \dots$, $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{c}$ també formen un triangle.

36. Resoleu

(a) $u+v=\dfrac{1}{u}+w=\dfrac{1}{v}+\dfrac{1}{w}$.

(b) $u+v+\dfrac{1}{uv}=\dfrac{1}{u}+w+\dfrac{u}{v}=\dfrac{1}{v}+\dfrac{1}{w}+vw=uv+\dfrac{w}{u}+\dfrac{1}{vw}$.

37. El *criteri de Schur-Cohn*

(a) Proveu que els dos zeros w del polinomi real t^2+bt+c satisfan $|w|<1$ si, i només si, $|b|<1+c<2$.

(b) Proveu que tots els zeros w del polinomi real t^3+bt^2+ct+d satisfan $|w|<1$ si, i només si,

$$|bd-c|<1-d^2\,|b+d|<|1+c|.$$

38. El "tauler" damunt del qual juguen dues persones és un polinomi mònic

$$f(x)=x^{2n}+a_{2n-1}\,x^{2n-1}+\cdots+a_1\,x+1,$$

en el qual els $2n-1$ coeficients $a_{2n-1},a_{2n-2},\ldots,a_1$ són nombres reals no especificats. El grau és un sencer *parell*≥ 4. Els jugadors juguen començant pel jugador A, desprès juga B i així successivament, l'un darrera de l'altre. Cada un dels jugadors tria un dels coeficients indeterminats finsa que el polinomi queda completament determinat. A guanya si $f(x)=0$ no té cap arrel real, mentre que B guanya en cas contrari.
Determineu una estratègia de guany per al jugador B.

39. Proveu que cada un dels termes de la successió

$$49, 4\,489, 444\,889, 44\,448\,889, \ldots, \underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n}9, \ldots$$

és un quadrat perfecte.

40. Proveu que $\pi(n)\geq\dfrac{\log n}{\log 4}$, on $\pi(n)$ és el nombre de primers que no sobrepassen el nombre natural n. És un teorema degut a WACALW SIERPIŃSKI.

41. Proveu que és impossible de trucar un parell de daus de manera que cada una de les sumes $2,3,\ldots,12$ tinguin la mateixa probabilitat. [Podeu suposar que els daus són distingibles.]

42. Tenim tres circumferències de centres O_1, O_2 i O_3 i radi r que es tallen en un punt P i es troben dins d'un triangle ABC. Suposem qua cada una de les circumferències toca un parell de costats del triangle ABC. Proveu que els incentre I i circumcentre O del triangle estan alineats amb P.

43. Determineu tots els parells $\langle p, q\rangle$ de nombres reals pels quals la desigualtat

$$\left|\sqrt{1-x^2}-px-q\right| \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

és cert per a cada x tal que $0 \leq x \leq 1$.

44. Si un nombre sencer k conté tots els dígits $0, 1, , 2, \ldots, 9$ i aquesta propietat persisteix en els seus múltiples $k, 2k, 3k, \ldots$, diem que k és un nombre *persistent*. No hi ha cap nombre que sigui persistent, però si que hi ha nombres que són *n−persistents*; és a dir, que $k, 2k, \ldots, nk$ continguin els deu dígits. El nombre 1 234 567 890 és k−persistent. Trobeu el valor de k. Quin és l'ordre de persistència del nombre 526 315 789 473 684 210?

Proveu que, per a cada n, hi ha almenys un nombre n−persistent.

45. (a) Proveu que l'*única* parella de sencers positius (a, b) per a la qual la suma coincideix amb el producte és $(2, 2)$.

(b) Proveu que només hi ha una parella de sencers positius diferents $(a, b), a < b$, tal que $a^b = b^a$ i trobeu-la.

46. Suposeu que x i y varien damunt de la semirecta real no negativa. si el valor de

$$x+y+\sqrt{2x^2+2xy+3y^2}$$

és sempre 4, proveu que x^2y és sempre més petit que 4.

47. Suposem que un quadrat de paper $ABCD$ el dobleguem de manera que el vèrtex D es col·loqui en un punt D' del costat BC. El costat AD es situa aleshores en la posició $A'D'$ i talla el costat AB en el punt E. Proveu que $A'E$ és igual al radio de la circumferència inscrita en el triangle rectangle EBD'.

48. Si $F = \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ és la suombres de Fibonacci, calculeu

(a) $S = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}}$.

(b) $\text{lím}_{n\to\infty} \dfrac{f_{n+r}}{f_n}$.

(c) $s = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{f_{2^n}}$.

49. Considereu l'equació

$$(*) \qquad \sqrt{2p+1-x^2}+\sqrt{3x+p+4} = \sqrt{x^2+9x+3p+9}$$

en la qual x i p són reals i les arrels quadrades són reals i no negatives. Proveu que, si es compleix $(*)$, aleshores

$$\left(x^2+x-p\right)\left(x^2+8x+2p+9\right)=0.$$

Seguidament, trobeu el conjunt de reals p pels quals $(*)$ és satisfeta per exactament un únic real nombre x.

50. Determineu les condicions necessàries i suficients que han de satisfer a, b, c per tal que

$$ax+by+cz=0$$

i

$$a\sqrt{1-x^2}+b\sqrt{1-y^2}+c\sqrt{1-z^2}=0$$

admetin una solució real x, y, z amb $|x|\leq 1, |y|\leq 1, |z|\leq 1$.

51. Suposeu que reordeneu els nombres naturals $1, 2, \ldots, n, \ldots$ d'acord amb

el primer nombre senar	(és a dir, 1)
el dos nombres parells següents	(és a dir, 2 i 4)
el tres nombres senars següents	(és a dir, $5, 7, 9$)
el quatre nombres parells següents	(és a dir, $10, 12, 14, 16$)
el cinc nombres senars següents	(és a dir, $17, 19, 21, 23, 25$)

i així successivament.

La successió és: $1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 19, \ldots$. Porveu que n−èsim terme u_n ve donat per l'equació

$$u_n=2n-\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right],$$

on $[x]$ designa el nombre sencer més gran més petit que x.

52. Suposeu que u, v, w, x, y, z són nombres reals amb x, y, z tots diferents que satisfan les equacions

$$u^3+x^3=v^3+y^3=w^3+z^3=a^3$$

i

$$u(y-z)+v(z-x)+w(x-y)=0.$$

Proveu que $uvw+xyz=a^3$. Quina és la situació si $x=y$?

53. Qui és més gran e^π o π^e?

54. Proveu que el nombre de successions de $0-1$ de longitud n que contenen exactement m ocurrències de 01 és $\left(\begin{array}{c} n+1 \\ 2m+1 \end{array}\right)$.

55. Resoleu el següent sistema d'equacions amb nombres naturals

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 - c^3 &= 3abc \\ a^2 &= 2(b+c). \end{aligned}$$

56. Considereu un quadrat unitat S del pla fixat en posició. Quin és el nombre màxim de quadarts unitat no solapats que poden col·locar-se a l'antorn d'S, tocant-lo però sense solapar-lo?

57. Traingles equilàters de costats $1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots$ són col·locats damunt d'una recta tocant-se en el vèrtex, com indica la figura. Proveu que els vèrtex que no es troben damunt la recta pertanyen a una paràbola i que els seus radis focals són tots ells sencers.

58. Proveu que els únics nombres sencers x pels quals

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

és un quadrat perfecte són $x = -1, 0$ i 3.

59. Si $P(x)$ és un polinomi de grau n tal que

$$P(x) = 2^x \quad \text{pera} \quad x = 1, 2, 3, \ldots, n+1,$$

trobeu $P(n+2)$.

60. Quin és el romanent quan dividim $x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81}$ per $x^3 - x$?

61. Si la magnitud de la funció quadràtica $f(x) = ax^2 + bx + c$ no excedeix mai 1 quan x recorre l'interval $[0, 1]$, proveu que la suma de les magnituds dels coeficients no pot sobrepassar 17:

$$|a| + |b| + |c| \leq 17.$$

62. Determineu el límit de la successió $\{P_n\}$ definida per $P_1 = 4$ i, per a $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$P_{n+1} = 2^{n+1}\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{P_n}{2^{n+1}}\right)^2}}.$$

63. Considereu dues circunferències C_1 i C_2 i sigui P un punt fix de la zona lenticular R en la qual es tallen les dues circumferències. Sigui UV la corda dins la zona R que passa per P. Determineu la manera de cosntruir la corda per a la qual el producte $PU \cdot PV$ és mínim.

64. Sigui M un conjunt no buit d'enters positius tal que sigui tancat per $4x$ i $[\sqrt{x}]$. Proveu que M és el conjunt dels nombres sencers positius.

65. Considerem la successió definida per

$$x_1 = x, \qquad \text{i per a cada } k \geq 1, \quad x_{k+1} = x_k^2 + x_k,$$

on x és un nombre real ≥ 1. Quin és el valor de la sèrie infinita

$$S = \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} + \cdots ?$$

66. Sigui $-1 \leq u \leq 1$. Determineu el mínim nombre K_u que satisfà la condició

$$|g'(u)| \leq K_u,$$

si $g(t)$ és un polinomi tal que $\mathrm{gr}(g(t)) \leq 2$ i $|g(t)| \leq 1$ per a $-1 \leq t \leq 1$.